Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве L. Число Λ называется собственным значением оператора A, если существует элемент $y \neq 0$ такой, что $Ay = \Lambda y$. Элемент y называется собственным вектором. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению Λ, является подпространством пространства L (докажите это самостоятельно).

Если $\Lambda \neq 0$, то число $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$ называется характеристическим числом оператора A.

Пусть выполнены следующие условия для оператора A:

1) $A: E \to E$ (E – бесконечномерное евклидово пространство, например, $h[a,b]$);
2) $A = A^*$;
3) A – вполне непрерывный оператор.

Далее будет показано, что при этих условиях оператор A имеет по крайней мере одно собственное значение.

Предварительно сформулируем и докажем ряд утверждений, из которых и будет следовать этот важный результат.

Лемма 1. Пусть A - самосопряженный оператор, и e – произвольный элемент пространства E такой, что $\|e\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\|Ae\|^2 \leq \|A^2 e\|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда e является собственным вектором оператора A^2, отвечающим собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$.

Доказательство. Из неравенства Коши-Буняковского легко получить

$$\|Ae\|^2 = (Ae, Ae) = (A^2 e, e) \leq \|A^2 e\| \cdot \|e\| = \|A^2 e\|,$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда элементы $A^2 e$ и e линейно зависимы, т.е. $A^2 e = \Lambda e$. Итак, e – собственный вектор оператора A^2.

Для того чтобы найти Λ, умножим равенство $A^2 e = \Lambda e$ скалярно на e. Учитывая, что $(A^2 e, e) = (Ae, Ae) = \|Ae\|^2$ и $\|e\| = 1$, получим, что $\Lambda = \|Ae\|^2$.

Пусть теперь e – собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$. Тогда $A^2 e = \|Ae\|^2 e$ и $\|A^2 e\| = \|Ae\|^2$. Лемма 1 доказана.

Определение. Элемент e называется максимальным элементом (вектором) оператора A, если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$.

Как было доказано в предыдущем в параграфе, вполне непрерывный оператор является ограниченным.

Лемма 2. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A обладает максимальным вектором.

Доказательство. Обозначим $\|A\| = M$. По определению нормы оператора существует последовательность y_n, $\|y_n\| = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, такая, что $z_n = Ay_n$ обладает свойством $\|z_n\| \to \|A\| = M$. Так как последовательность y_n ограничена, и оператор A – вполне непрерывный, то из последовательности z_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность $z_{n_k} \to z \in E$. Переобозначим $z_{n_k} = z_n$. Из сходимости $z_n \to z$ при $n \to \infty$ следует, что $\|z_n\| \to \|z\| = M$.

Покажем, что элемент $\tilde{z} = \dfrac{z}{M}$ является максимальным вектором оператора A. Рассмотрим последовательность $\tilde{z}_n = \dfrac{z_n}{M}$. На основании леммы 1 имеем

$$\|A\tilde{z}_n\| = \left\|\frac{Az_n}{M}\right\| = \frac{1}{M}\|A^2 y_n\| \ge \frac{1}{M}\|Ay_n\|^2 = \frac{1}{M}\|z_n\|^2.$$

С другой стороны, $\|A\tilde{z}_n\| \le \|A\|\|\tilde{z}_n\| = \|A\|\left\|\dfrac{z_n}{M}\right\| = \|z_n\|$, и этих двух неравенств вытекает

$$\frac{\|z_n\|^2}{M} \le \|A\tilde{z}_n\| \le \|z_n\|.$$

Поскольку $\tilde{z}_n \to \tilde{z}$ и $\|z_n\| \to M$ то, переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем соотношении, получим $M \le \|A\tilde{z}\| \le M$, или $\|A\tilde{z}\| = M$, т.е. $\tilde{z} = \dfrac{z}{M}$ является максимальным вектором для оператора A.

Лемма 3. Если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A, то z - собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$.

Доказательство. Из определения максимального вектора следует

$$M^2 = \|A\|^2 = \|Az\|^2 \le \|A^2 z\| \le \|A^2\|\|z\| = \|A^2\| \le \|A\|^2 = M^2,$$

т.е. $\|Az\|^2 = \|A^2 z\|$. Отсюда, согласно лемме 1, следует, что z - собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|Az\|^2 = \|A\|^2 = M^2$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Если оператор A^2 обладает собственным вектором z, соответствующим собственному значению M^2, то оператор A имеет собственный вектор, отвечающий собственному значению M или $-M$.

Доказательство. Так как z – собственный вектор оператора A^2, то $z \ne 0$ и $A^2 z = M^2 z$. Перепишем это равенство в виде $(A^2 - M^2 I)z = 0$, где I – единичный оператор, или $(A - MI)(A + MI)z = 0$.

Возможны два случая. Пусть сначала $u = (A + MI)z \ne 0$. Тогда $(A - MI)u = 0$ или $Au = Mu$, т.е. u – собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению M.

Если же $u = (A + MI)z = 0$, то z – собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению $-M$.

Теорема. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ, причем $|\Lambda| = \|A\|$.

Доказательство. Согласно лемме 2 оператор A обладает максимальным вектором z. Лемма 3 утверждает, что этот вектор z является собственным вектором оператора A^2, соответствующим собственному значению $\|A\|^2$, а из леммы 4 следует, что оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению $\|A\|$ или $-\|A\|$, т.е. $|\Lambda| = \|A\|$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора.

Пример. Вполне непрерывный оператор, который не имеет ни одного собственного значения, это, например, невырожденный оператор Вольтерра с непрерывным ядром. Этот результат мы получим позднее.

Пример. Рассмотрим оператор умножения на x, а именно такой, что для любого элемента y из $h[a,b]$ (непрерывной функции $y(x)$) $Ay = x \cdot y(x)$ Оператор A самосопряженный, т.к. для любых $y_1(x)$, $y_2(x)$ из $h[a,b]$ верно

$$(Ay_1, y_2) = \int_a^b x\, y_1(x)\, y_2(x)\, dx = \int_a^b y_1(x)\, x\, y_2(x)\, dx = (y_1, Ay_2).$$

Оператор A не имеет собственных значений, т.к. если Λ - его собственное значение, то $x \cdot y(x) = \Lambda\, y(x)$, из чего следует, что $y(x) \equiv 0$ при $x \in [a,b]$, а это противоречит определению собственного вектора.

Рассмотрим теперь оператор Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, действующий $h[a,b] \to h[a,b]$. Пусть ядро $K(x,s)$ оператора удовлетворяет следующим условиям:

1) вещественное,
2) непрерывное по совокупности переменных (x,s),
3) не равное тождественно нулю,
4) симметрическое.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)-4) для ядра интегрального оператора Фредгольма A: $h[a,b] \to h[a,b]$. Тогда этот оператор обладает собственным значением Λ, $\Lambda \neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \neq 0$, $y \in h[a,b]$.

Замечание. В теории интегральных уравнений удобнее использовать характеристические числа, а именно $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$, $\Lambda \neq 0$. Тогда в утверждении теоремы следует записать $\lambda A y = y$.

Утверждение. Пусть A - линейный ограниченный оператор, $A: N_1 \to N_2$, где N_1 и N_2 – нормированные пространства, и $A \neq 0$. Тогда $\|A\| > 0$.

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть $A\varphi_1 = \Lambda_1 \varphi_1$, $A\varphi_2 = \Lambda_2 \varphi_2$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, φ_1 и φ_2 – соответствующие собственные векторы. Тогда
$0 = (A\varphi_1, \varphi_2) - (A\varphi_2, \varphi_1) = \underbrace{(\Lambda_1 - \Lambda_2)}_{\neq 0}(\varphi_1, \varphi_2)$, из чего следует $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Теорема. Число различных собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A, удовлетворяющих условию $\| A \| \geq |\Lambda| \geq \delta > 0$, где δ - фиксированное положительное число, конечно.

Определение. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью собственного значения.

Теорема. Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов.

Замечание. Нулевому собственному значению может соответствовать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.